Interpolation polynômiale

Said EL HAJJI

Université Mohammed V - Agdal.
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications - Rabat
http://www.fsr.ac.ma/mia/

Outline

Outline

Outline

1. Introduction
2. Une méthode directe basée sur la résolution d’un systéme linéaire:
3. Une méthode itérative : Méthode de Lagrange
   - Interpolation Linéaire :
   - Interpolation parabolique
   - Interpolation de Lagrange
4. Interpolation Itérée de Newton-Côtes
5. Erreur d’Interpolation polynomiale :

Outline

Outline

Introduction

Nous abordons dans ce chapitre un nouveau type de problème, faisant intervenir la notion d'approximation d'une fonction.

Exemples :

1) D'aprés la Formule de Taylor à l'ordre 5 de la fonction $\sin(x)$, on a :

$$\forall x \in Vois(0), \sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \sin^{(6)}(\xi)\frac{x^6}{6!}$$

L'erreur commise serait de l'ordre de $\sin^{(6)}(\xi)\frac{x^6}{6!}$ Ainsi :

- Si $N = 3$, $\sin(0.1) = (0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} = 9.983\,3 \times 10^{-2}$
- Si $N = 5$, $\sin(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^5}{5!} = 9.983\,3 \times 10^{-2}$

Avec le logiciel Maple on a : $\sin(0.1) = 9.983\,3 \times 10^{-2}$

Introduction

2) Avec les cours d'analyse I et II, on ne connait pas d'expression explicite de $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$
Cependant d'aprés :

- La formule du trapèze $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{1+e^{-1}}{2} = 0.683\,94$
- La formule de Simpson : $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{1}{6}\left[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)\right] = \frac{1}{6}(1 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) = 0.747\,18$

Avec le Logiciel Maple, on a : $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746\,82$

Introduction

On ne connait pas à ce niveau du cours l'expression explicite de l'erreur.

La notion d'approximation d'une fonction consiste à remplacer un problème donné par un problème voisin.

La question fondamentale serais de savoir la qualité de cette approximation.

Introduction

Remarque:

En pratique la fonction f est connue explicitement, ou seulement par ses valeurs en quelques points.

La notion d'interpolation polynomiale est la façon la plus simple d'obtenir une telle approximation.

Théorème :

Soit f une fonction continue dans $[a, b] \subset IR$, alors pour tout $\epsilon > 0$ donné, il existe un polynôme P_n de degré n tel que

$$\underset{x \in [a,b]}{Max} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

Introduction

1. L'interpolation polynômiale est un outil pour la construction des méthodes d'intégration numérique ou des méthodes d'approximation des équations différentielles.
2. L'interpolation par les fonctions splines est largement utilisée dans tous les programmes de dessin assisté par ordinateur, conception assistée par ordinateur ou plus généralement de graphisme.
3. Les séries de Fourier et leur analogue discret, la transformation de Fourier discrète : Elles sont un moyen très utile pour l'approximation des fonctions périodiques.

Introduction

Remarque:

- Pour les équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis, un des outils de base de l'ingénierie moderne, utilise de façon essentielle l'interpolation multi-dimensionnelle
- Une façon naturelle d'approcher les fonctions périodiques est d'utiliser les polynômes trigonométrique.

Introduction

Nous allons nous limiter à l'introduction de l'interpolation Polynômiale. Elle consiste à déterminer un polynôme $P_n(x)$ de degré n qui puisse remplacer lors des applications la fonction $f(x)$.

De plus, c'est un outil efficace pour :

- Calculer, pour x donné, une approximation de $f(x)$ en calculant $P_n(x)$
- Construire :
  1. des méthodes d'intégration numérique
  2. des méthodes de différentation
  3. des méthodes d'approximation des équations différentielles
  4. ...

Introduction

Le principe est simple, le procédé est le suivant :

- On choisit (ou on se donne) $(n+1)$ points $x_0, x_1, ..., x_n$.
- On calcule $y_0 = f(x_0), ..., y_n = f(x_n)$ ou on se donne (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.
- On cherche un polynôme de degré n tel que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

Introduction

Remarque:

1. Les points $(x_i, y_i)_{i=0,n}$ sont appelés points d'interpolation.
2. Si la fonction f est connue seulement par ses valeurs en quelques points, les $(n+1)$ points $x_0, x_1, ..., x_n$ sont fixés..
3. Si on veut que $P_m(x_i) = f(x_i)$ et $P'_m(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, ..., n$, on obtient l'interpolation dite d'Hermite

Introduction

Il existe plusieurs techniques pour calculer $P_n(x)$. Les plus connues sont celles de Lagrange et de Newton-Côtes. Nous allons en fait le faire des deux façons :

1. Une méthode directe basée sur la résolution d'un systéme linéaire
2. Une méthode itérative due à Lagrange.

Nous terminerons ce chapitre par :

1. Une brève discution sur l'erreur d'interpolation polynomiale
2. Une brève description du principe de la méthode itérée de Newton-Côtes

Méthode directe

- On se donne $(n+1)$ points $x_0, x_1, ..., x_n$.
- On calcule $y_0 = f(x_0), ..., y_n = f(x_n)$.
- On cherche un polynôme de degré n tel que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

Écrivons explicitement $P_n(x_i) = y_i$.

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + ... + a_1 x_i + a_0 = y_i, \qquad i = 0, ..., n$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Méthode directe

Matrice de type Vandermonde. Son déterminant est

$$\det = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

On a $\det \neq 0$ si tous les x_i sont distincts. On peut donc trouver un unique vecteur de coefficients $(a_n, ..., a_0)$ résolvant le problème.

Outline

Interpolation Linéaire

On considère deux points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1 \\ y_0 = f(x_0) \text{ et } y_1 = f(x_1). \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme $P_1(x) = ax + b)$ qui passe par deux points distincts $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ $(x_0 \neq x_1)$. On peut:
1) Résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} ax_0 + b & = & y_0 \\ ax_1 + b & = & y_1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a & = & \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \\ b & = & y_0 - ax_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

On a :

$$P_1(x) = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}x + (\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0})$$

et

$$P_1(x_0) = y_0 \text{ et } P_1(x_1) = y_1$$

2) Poser

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

On a:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}) \\ &= \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} x + (\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}) \end{aligned}$$

On a :

$$P_1(x_0) = y_0 \text{ et } P_1(x_1) = y_1$$

car

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Interpolation Linéaire

Ces deux procédés déterminent évidemment le même polynôme de dégré 1 (la même droite).

Si maintenant, on veut déterminer le polynome de degré 2 qui passe par trois (3) points distincts alors:

i) la première expression de $P_1(x)$ est inadéquate (il faut refaire les calculs)

ii) la dexième expression se prête assez facilement à une généralisation par récurrence.

Interpolation Linéaire

Exemple :

Déterminer le polynôme d'interpolation $P_1(x)$ de degré 1 tel que $P_1(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$

avec $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (2, 5)$

D'aprés la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}) \\ &= 1 \frac{(x-2)}{(0-2)} + 5 \frac{(x-0)}{(2-0)} \\ &= 1 \frac{(x-2)}{(-2)} + 5 \frac{(x)}{(2)} = 2x + 1 \end{aligned}$$

Outline

Interpolation parabolique

On considére trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2) avec :

$$\begin{cases} x_0 \neq x_1 \text{ ,et } x_0 \neq x_2 \quad et \quad x_1 \neq x_2 \\ y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1) \text{ et } y_2 = f(x_2). \end{cases}$$

Pour déterminer le polynôme $P_2(x)$ de dégré 2, d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par trois points distincts $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ et (x_2, y_2), il suffit de poser:

Interpolation parabolique

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

On a :

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Interpolation parabolique

Ainsi

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \\
& y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\
& y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}
$$

est le polynôme d'interpolation polynômiale associé.

Interpolation parabolique

Exemple :
Déterminer le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que $P_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ et 2
avec $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$ et 2 , $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$

Interpolation parabolique

D'aprés la méthode de Lagrange,

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\
&= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
&+ y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 1\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} + 2\frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} + 5\frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} \\
&= 1\frac{(x-1)(x-2)}{2} + 2\frac{(x)(x-2)}{-1} + 5\frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} \\
&= x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Interpolation parabolique

Remarque:

1. Pour calculer $P_2(x)$,on n'a pas utilisé le polynome $P_1(x)$ calculé dans l'exemple précédent et pourtant on avait deux points communs.
2. $L_i(x), i = 0, 1, 2$ sont des polynômes de degré 2 :
   - $L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
   - $L_1(x) = \frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} = -x(x-2) = -x^2 + 2x$
   - $L_2(x) = \frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Outline

Interpolation de Lagrange

- On choisit $n+1$ points $x_0, x_1, ..., x_n$.
- On calcule $y_0 = f(x_0), ..., y_n = f(x_n)$.
- On cherche un polynôme de degré n tel que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

On introduit les coefficients d'interpolation de Lagrange.

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}...(x_k - x_n)}$$

$$L_k(x) = \prod_{j=0 \ j \neq k}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

$L_k(x)$ est un polynôme de degré n,

Interpolation de Lagrange

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Donc

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

est un polynôme de degré n qui vérifie bien $P(x_i) = y_i$

Interpolation de Lagrange

Propriété : Le Polynôme d'interpolation polynômiale est unique.

En effet si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes d'interpolation alors :
$P(x) - Q(x)$ est un polynôme de degré n pour lequel

$$P(x_i) - Q(x_i) = 0, \qquad i = 0, ..., n.$$

Ce polynôme de degré $\leq n$ ayant $n + 1$ racines, il est identiquement nul.

Interpolation de Lagrange

Exemple :

On suppose que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et que $(x_0, y_0) = (0, 0), (x_1, y_1) = (1, 1)$ et $(x_2, y_2) = (8, 2)$

1) Déterminer le polynôme $P_2(x)$ d'interpolation polynômiale qui passent par les points $(x_i, y_i)_{i=0,2}$

Interpolation de Lagrange

D'aprés la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
&+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 0\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 1\frac{(x-0)(x-8)}{(1-0)(1-8)} + 2\frac{(x-0)(x-1)}{(8-0)(8-1)}
\end{aligned}$$

$$P_2(x) = 1\frac{x(x-8)}{-7} + 2\frac{x(x-1)}{56} = -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x$$

Interpolation de Lagrange

On a bien $P_2(0) = 0, P_2(1) = 1$ et $P_2(8) = -\frac{3}{28}(8)^2 + \frac{31}{28}8 = 2$
2) Calculer $P_2(x)$ et $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour $x = 0.5, 0.95, 1, 1.5$ et 3.
On a :

x	$f(x)$	$P_2(x) = -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x$
0.5	0.7937	0.52679
0.95	0.98305	0.95509
1	1	1
1.5	1.1447	1.4196
3	1.4422	$\frac{33}{14} = 2.3571$

Interpolation de Lagrange

Remarque :
1) En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de dégré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux. Ainsi dans l'exemple précedent, il faut augmenter le nombre de points d'interpolations.
2) Si les valeurs y_k sont des valeurs expérimentales. L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.

Interpolation de Lagrange

3) La méthode de Lagrange s'adapte mal au changement du nombre de points $(x_i, y_i)_i$. On ne peut utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de n à $(n+1)$ points.
4) **Phénomène de RUNGE** (fonction de Runge) : L'interpolation polynômiale ne fournit pas une bonne approximation de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Si on augmente le nombre de points d'interpolation le resultat devient plus mauvais.

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- On choisit $n+1$ points $x_0, x_1, ..., x_n$.
- On calcule $y_0 = f(x_0), ..., y_n = f(x_n)$.
- On cherche un polynôme de degré n tel que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$.

L'Interpolation Itérée de Newton-Côtes est un procédé itératif qui permet de calculer le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de dégré n basé sur $(n+1)$ points $(x_i, y_i)_{i=0,n}$ à partir du polynôme d'interpolation $P_{(n-1)}(x)$ de dégré $(n-1)$ basé sur n points $(x_i, y_i)_{i=0,(n-1)}$, en posant :

$$P_n(x) = P_{(n-1)}(x) + C(x), \ n \geq 1$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

avec

$$C(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{(n-1)})$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{(k-1)})(x_k - x_{(k+1)})...(x_k - x_n)}$$

Les coéfficients a_n sont appelés différences divisées d'ordre n de la fonction f, on note :

$$a_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- On appelle "différence divisée d'ordre 0 de f en un point x":

$$f[x] = f(x)$$

- Différence "divisée d'ordre 1 de f en x et y":

$$\begin{aligned} f[x,y] &= \frac{f[x]-f[y]}{x-y} \\ &\text{on a} \\ f[x,y] &= \frac{f(x)}{x-y} + \frac{f(y)}{y-x} \end{aligned}$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

- Différence "divisée d'ordre 2 de f en x, y et z":

$$
\begin{aligned}
f[x,y,z] &= \frac{f[x,y]-f[y,z]}{x-z} \\
&= \frac{f(x)}{(x-y)(x-z)} + \frac{f(y)}{(y-x)(y-z)}
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{f(z)}{(z-x)(z-y)}
$$

et plus généralement:

$$
f[x_1, x_2, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x_i - x_k)}
$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

Remarque:
Les différences divisées sont indépendants de l'ordre des points.

Quel est le lien entre $f(x)$ et lex différences divisées?
Soit x un point autre que les $n+1$ points x_i, $i = 1, ..., n$. On a

$$\begin{aligned} f[x, x_0] &= \frac{f(x) - f[x_0]}{x - x_0} \\ & d'où \\ f(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0] \end{aligned}$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

mais comme

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

alors

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] - (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

en continuant ainsi de proche en proche on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] \\ &+ ... + (x - x_0) ... (x - x_{n-1}) f[x_0, ..., x_n] + \\ &\quad (x - x_0)...(x - x_n) f[x, x_0, ..., x_n] \end{aligned}$$

Interpolation Itérée de Newton-Côtes

on vérifie que

$$f(x) = P_n(x) + L(x)f[x, x_0, ..., x_n]$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$, pour $i = 0, ..., n$. C'est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange, on l'appelle le polynôme de Newton.

Erreur d'Interpolation polynomiale

L'erreur commise lors d'une interpolation est une question fondamentale en analyse numérique:

- elle renseigne à priori sur la nature de cette erreur
- elle fournit des informations sur les termes qui y participent
- elle permet d'avoir un ordre de grandeur de l'erreur commise.

Erreur d'Interpolation polynomiale

Théorème :

Soient f une fonction de classe C^{n+1} dans I et , $(x_i)_{i=0,n}$ $(n+1)$ points distincts dans I avec $x_0 < x_1 < ... < x_n$
Alors pour tout $x \in [x_0, x_n]$, il existe $\zeta = \zeta(x)$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}L(x)$$

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_kL_k(x)$$

$$L_k(x) = \prod_{j=0\ j\neq k}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

Erreur d'Interpolation polynomiale

Remarque :

1) Cette formule montre que :

i) l'erreur est nulle pour $x = x_i$ i.e. x est un point d'interpolation.

ii) l'erreur dépend de la fonction considérée (de $f^{(n+1)}$) et des points d'interpolations $(x_i)_i$.

2) Cette formule d'erreur permet de trouver des formules d'erreur pour l'intégration numérique et la differentiabilité numérique.

Erreur d'Interpolation polynomiale

Dans le cas de l'erreur d'interpolation à partir de la forme de Newton, on a:

$$f(x) - P_n(x) = L(x).f[x, x_0, ..., x_n].$$

Comme on a la même fonction f selon les mêmes points x_i pour $i = 0, ..., n$, il s'agit de deux formes du même polynôme, et l'erreur d'interpolation est la même, d'où

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} L(x) = L(x).f[x, x_0, ..., x_n].$$

Erreur d'Interpolation polynomiale

Exemple :
Déterminer l'erreur d'interpolation polynomiale dans le cas de l'interpolation parabolique
On approche la fonction $f(x)$ par la parabole passant par les points $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$.
Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que
$P_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ et 2
avec $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$ et 2 , $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 5)$

Erreur d'Interpolation polynomiale

D'aprés la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\ &= 1\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} + 2\frac{(x)(x-2)}{(1)(-1)} + 5\frac{(x)(x-1)}{(2)(1)} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Erreur d'Interpolation polynomiale

D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!}x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Si $\left|f'^{(3)}(x)\right| \leq M$ alors

$$\forall x \in [0, 2] \;,\; |f(x) - P_2(x)|$$

$$\begin{aligned} |f(x) - P_2(x)| &\leq \frac{M}{6}\,|x(x - 1)(x - 2)| \\ &\leq \frac{M}{6}x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$